

БИХРОМАТИЧЕСКИЕ ВОЗБУДИМЫЕ МЕТАСРЕДЫ ШРЕДИНГЕРА

Лабунец В.Г., Артемов И.В.¹, Остхаймер Е.²

¹ Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
проспект Мира, 19, Екатеринбург, Свердловская обл., 620002, Россия
тел.: (343) 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com

² Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA

Аннотация — В данной работе мы используем квантовый клеточный автомат (ККА) для изучения базовых закономерностей и процесса обработки изображений в системах с квантовой диффузией Шредингера с обобщенными комплексными коэффициентами диффузии. Обобщенные комплексные числа обладают действительной и мнимой частями со свойством квадрата мнимой единицы $i^2 = -1$ (классический случай), $i^2 = +1$ (двойные числа) и $i^2 = 0$ (дуальные числа). Они формируют три двумерных комплексных алгебры. Дискретизация уравнения Шредингера дает "решетчатые" метаматериальные модели с различными комплекснозначными физическими параметрами. Процесс распространения возбуждения в таких средах описывается уравнениями Шредингера с волновыми функциями, которые принимают значения в алгебрах комплексных, дуальных и двойных чисел. Если об обыкновенном компьютере можно говорить как о "программируемом объекте", то система с квантовой диффузией Шредингера в форме ККА - это компьютер нового типа, который лучше иллюстрируется понятием "программируемый материал". Цель данной работы - представить новую метасреду в форме клеточного автомата. Клетки размещены в 2D массиве, они могут выполнять базовые операции с комплексными числами (в различных комплексных алгебрах) и обмениваться сообщениями об их состояниях. Клеточный автомат как архитектурная модель успешно используется для решения задач компьютерного зрения и обработки изображений в оттенках серого. Новая среда обладает широкими возможностями по обработке бихроматических изображений по сравнению со средой с обыкновенной диффузией (коэффициент диффузии - действительное число). Данные метасреды используются в медицине для создания так называемого "кремниевого глаза". Предложенная среда может служить прототипом такого искусственного глаза для восприятия бихроматических изображений.

THE BICHROMATIC EXCITABLE SCHRODINGER METAMEDIUM

Labunets V.G., Artemov I.V.¹, Ostheimer E.²

¹ Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin
pr. Mira, 19, Yekaterinburg, Sverdlovsk region, 620002, Russian Federation
ph.: 375-48-48, e-mail: vlabunets05@yahoo.com

² Capricat LLC 1340 S. Ocean Blvd., Suite 209 Pompano Beach 33062 Florida USA

Abstract—In this work, we apply quantum cellular automata (QCA) to study pattern formation and image processing in quantum-diffusion Schrodinger systems (QDSS) with generalized complex diffusion coefficients. Generalized complex numbers have the real part and imaginary part with the imaginary unit $i^2 = -1$ (classical case), $i^2 = +1$ (double numbers) and $i^2 = 0$ (dual numbers). They form three 2-D complex algebras. Discretization of the Schrodinger equation gives "lattice based metamaterial models" with various complex-valued physical parameters. The process of excitation in these media is described by the Schrodinger equations with the wave functions that have values in algebras of the complex, dual, double numbers. If a traditional computer is thought of as a "programmable object", QDSS in the form of QCA is a computer of new kind and is better visualized as a "programmable material". The purpose of this work is to introduce new metamedium in the form of cellular automata. The cells are placed in a 2-D array and they are capable of performing basic complex operating (in different complex algebras) and exchanging messages about their state. Cellular automata like architectures have been successfully used for computer vision problems and grey-level image processing. Such media possess large opportunities in processing of bichromatic images in comparison with the ordinary diffusion media with the real-valued diffusion coefficients. The latter media are used for creation of the eye-prosthesis (so called the "silicon eye"). The medium suggested can serve as the prosthesis prototype for perception of the bichromatic images.

I. Введение

Мы исследуем графическое представление решения двумерного уравнения Шредингера, найденного с помощью прохождения нескольких итераций клеточного автомата. Начальные условия уравнения каждый раз постоянны: мы используем черное квадратное изображение с белой точкой в центре (это единственная клетка клеточного автомата, которая обладает ненулевым состоянием в начале). Исключение составляют эксперименты с движущейся частицей, которые будут описаны в одном из следующих разделов. Больше базовой информации о клеточных автоматах, такой как сфера их применения и параметры, можно найти в [1].

Клеточный автомат предоставляет нам более быстрый, наглядный и простой способ моделирования метасреды по сравнению с методом решения уравнений напрямую. Мы не первые, кто использует клеточный автомат для подобных целей.

Например, в [2] и [3] описано, как использовать квантовый клеточный автомат для обработки изображений. Конечно, мы уже можем достигать хороших результатов в решении задач сегментации изображений и выделения контуров с использованием ККА, но никому не известно, обеспечивает ли ККА с полностью мнимым коэффициентом диффузии D наилучший результат. Поэтому важно начать изучение ККА с более общими свойствами, где D - это произвольное комплексное число с фазой, не обязательно равной 90° .

Мы используем хорошо известное многим выражение для 2D уравнения Шредингера как основу:

$$\frac{d}{dt} \varphi = D \cdot \left(\frac{d^2}{dx^2} \varphi + \frac{d^2}{dy^2} \varphi \right), \quad (1)$$

где $\varphi(x, y, t)$ - это комплексное значение состояния клетки, расположенной в точке с координатами (x, y) в момент времени (которому соответствует определенный номер итерации) t ; D - это комплексный коэффициент диффузии.

Для нашей дискретной клеточной реализации метасреды полезно представить лапласиан из скобок по-другому:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \varphi &= \varphi(x+1, y, t) + \varphi(x-1, y, t) - 2\varphi(x, y, t), \\ \frac{d^2}{dy^2} \varphi &= \varphi(x, y+1, t) + \varphi(x, y-1, t) - 2\varphi(x, y, t), \\ \frac{d}{dt} \varphi &= \varphi(x, y, t+1) - \varphi(x, y, t). \end{aligned} \quad (2)$$

В результате мы получим выражение для состояния клетки для следующей итерации:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t+1) &= \varphi(x, y, t) + D \cdot \\ &\cdot (\varphi(x+1, y, t) + \varphi(x-1, y, t) + \varphi(x, y+1, t) + \varphi(x, y-1, t) - 4\varphi(x, y, t)). \end{aligned} \quad (3)$$

Можно заметить, что последнее выражение в явном виде содержит матрицу весовых коэффициентов, которая часто используется в обработке изображений для обнаружения контуров в так называемом фильтре Лапласа (см. [4]):

$$\begin{bmatrix} 0 & \varphi(x, y+1, t) & 0 \\ \varphi(x-1, y, t) & -4 \cdot \varphi(x, y, t) & \varphi(x+1, y, t) \\ 0 & \varphi(x, y-1, t) & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

В этой матрице мы используем только четырех ближайших "соседей" центральной клетки автомата. Для аппроксимации Лапласиана можно найти и более точные и сложные матричные маски (пример - "алмазная маска" из [5]).

II. Влияние фазы коэффициента диффузии для евклидовой геометрии

Мы будем использовать фиксированное значение модуля D , т.к. оно влияет только на отображение результата. Нам нужно найти такой $|D|$, который обеспечит достаточно быстрый процесс распространения диффузии, но не приведет к переполнению памяти из-за появления слишком больших числовых значений. $|D| = 0,11$ оказался очень удобным для наших целей.

Для стандартной геометрии на комплексной плоскости мы используем обыкновенные формулы, которые мы приводим только для сравнения с разными "экзотическими" геометриями. Пусть Z — комплексное число, R — действительное число, φ — фаза в радианах, $i_{-1} = i: i^2 = -1$, тогда

$$\begin{aligned} Z &= R \cdot (\cos(\varphi) + i_{-1} \cdot \sin(\varphi)); \\ |Z| &= \sqrt{(Re\{Z\})^2 + (Im\{Z\})^2}; \end{aligned} \quad (5)$$

$$Re\{Z\} = R \cdot \cos(\varphi); \quad Im\{Z\} = R \cdot \sin(\varphi).$$

На Рис. 1 и Рис. 2 можно увидеть результаты моделирования для комплексного коэффициента D с разными значениями фазы.

Очевидно, что если $\arg\{D\} = 0^\circ$ и мы присвоим значение $Z_{excited} = 1 + j \cdot 0$ состоянию клетки, которую мы только что возбудили, то мы не получим ни одного ненулевого значения для мнимых составляющих и фаз состояний всех клеток. Это соответствует реализации уравнения теплопроводности или классического уравнения диффузии (см. [6]).

Итоговые изображения были инвертированы для уменьшения количества черного цвета, чтобы

обеспечить лучшее визуальное восприятие, поэтому большие значения соответствуют более темным точкам.

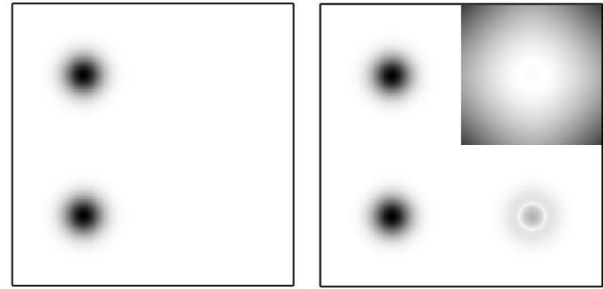


Рис. 1. 128-ая итерация комплексной диффузии для фаз D , равных 0° (рисунок слева) и 5° (рисунок справа) при $i^2 = -1$

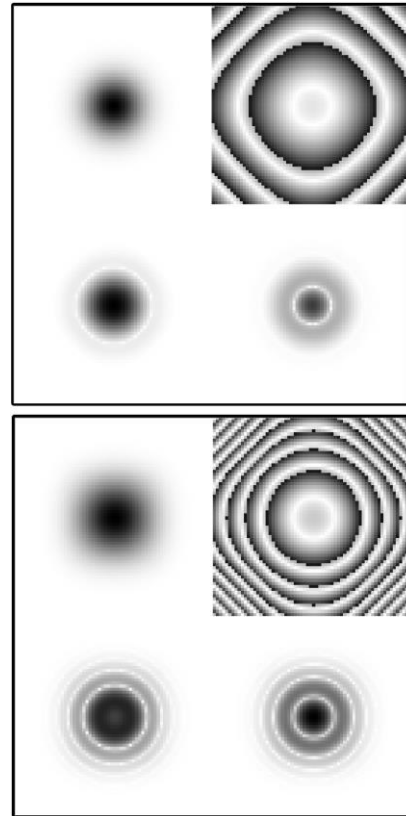


Рис. 2. 128-ая итерация комплексной диффузии для фаз D , равных 25° (рисунок сверху) и 60° (рисунок снизу) при $i^2 = -1$

Каждое изображение на рисунках состоит из четырех четвертей, которые представляют абсолютные значения комплексных чисел в клетках (верхняя левая четверть), их фазы (верхняя правая четверть), действительные (нижняя левая четверть) и мнимые (нижняя правая четверть) части.

На Рис. 2 (правая часть) можно увидеть, что действительные и мнимые части колеблются в противофазе (белые кольца в нижних четвертях размещены не одинаково: они расположены друг между другом). Это обеспечивает плавное уменьшение значений модулей комплексных чисел в клетках: в левой верхней четверти нет белых колеи нулевого значения модуля. Если мы рассмотрим «разрез» изображения на верхнем левом квадрате, то мы увидим, что абсолютные значения состояний

клеток уменьшаются по закону гауссовой кривой (см. Рис. 3).

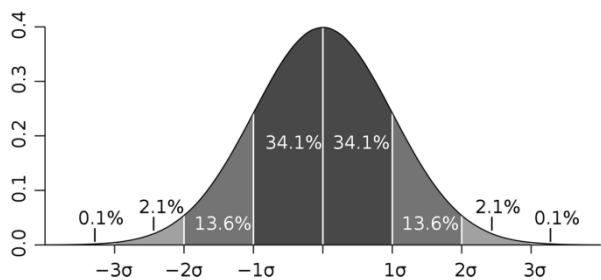


Рис. 3. Гауссоида, показывающая нормальное распределение абсолютных значений состояний клеток

III. Уравнение Шредингера для геометрии Минковского

Для геометрии Минковского нам следует использовать гиперболические функции вместо привычных тригонометрических [7]. Если $i_{+1} = i: i^2 = +1$, то

$$Z = R \cdot (\cosh(\varphi) + i_{+1} \cdot \sinh(\varphi));$$

$$|Z| = \sqrt{(Re\{Z\})^2 - (Im\{Z\})^2}; \quad (6)$$

$$Re\{Z\} = R \cdot \cosh(\varphi); \quad Im\{Z\} = R \cdot \sinh(\varphi).$$

Единичная окружность на комплексной плоскости с геометрией Минковского принимает совершенно иную форму - она превращается в гиперболу (см. Рис. 4). Именно поэтому используются гиперболические функции для получения координат комплексного числа на 2D плоскости. Также очень важно, что сейчас в выражении для абсолютного значения Z появилось вычитание. Это приводит к возможности возникновения комплекснозначных модулей. Для упрощения и обеспечения единообразия визуализации мы использовали только действительную или мнимую часть $|Z|$.

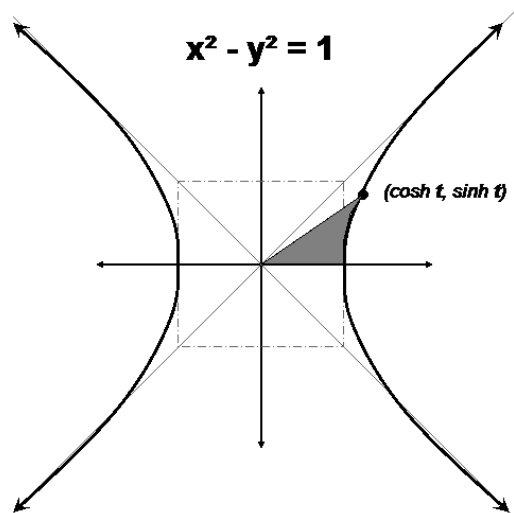


Рис. 4. Гипербола - это единичная "окружность" для геометрии Минковского

На Рис. 5 можно увидеть результаты моделирования для тех же самых начальных условий (единственная возбужденная центральная клетка) при использовании геометрии Минковского для малых значений фазы D .

Отметим, что волны в четвертях, отображающих действительные части и фазы массива состояний клеток, пропали. Количество «гребней» волн в четверти мнимых частей не увеличивается с ростом

фазы коэффициента D . Кольцо высоких значений фазы появляется в верхней правой четверти.

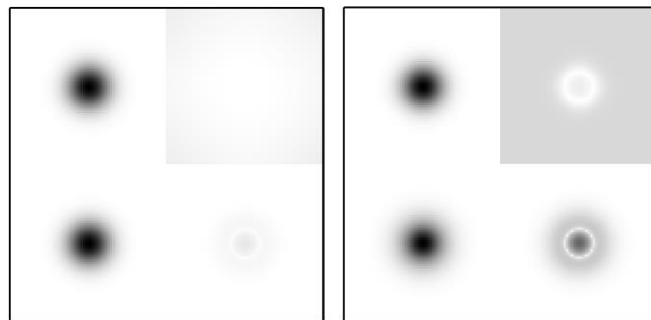


Рис. 5. 128-я итерация комплексной диффузии для значений фаз D , равных 5° и 20° при $i^2 = +1$

IV. Комплексная диффузия и геометрия Галилея

Для геометрии Галилея мы можем применять самые простые формулы для комплексных чисел на новой комплексной плоскости [8]. Если $i_0 = i: i^2 = 0$, то

$$Z = R \cdot (1 + i_0 \cdot \tan(\varphi));$$

$$|Z| = Re\{Z\}; \quad (7)$$

$$Re\{Z\} = R \cdot 1; \quad Im\{Z\} = R \cdot \tan(\varphi).$$

В геометрии Галилея единичная окружность превращается в простую пару симметричных вертикальных прямых линий. Это приводит к независимости $|Z|$ и $Re\{Z\}$ от фазы φ . Также можно отметить, что $Im\{Z\}$ может принимать необычайно большие значения из-за функции тангенса в соответствующем выражении. Мы использовали объединенную нормализацию для четвертей, визуализирующих действительные и мнимые части состояний клеток, чтобы показать баланс между этими двумя компонентами комплексных чисел.

На Рис. 6 показаны результаты моделирования для случая с использованием геометрии Галилея.

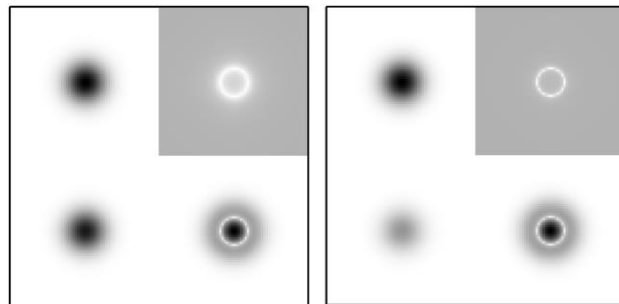


Рис. 6. 128-я итерация комплексной диффузии для фаз D , равных 50° и 80° при $i^2 = 0$

Как вы можете видеть, в данном случае мы имеем то же самое кольцо одинаково больших фаз, но оно оформляется боле медленно, и значения в четверти действительных частей начинают затухать со временем. Когда мы повышаем $\arg\{D\}$, можно увидеть, что пока $\arg\{D\} < 45^\circ$, средняя мнимая составляющая всех клеток мала по отношению к средней действительной части, но при $\arg\{D\} > 45^\circ$ мнимая часть начинает «перевешивать».

V. Процесс комплексной диффузии для плавно изменяющегося квадрата мнимой единицы

Мы можем обобщить наш опыт, используя не только мнимые единицы, квадрат которых равен -1, 0, или 1. Можно определить новую переменную $i_k = i: i^2 = k$ и воспользоваться некоторыми новыми выражениями, которые верны для любой разновидности геометрии:

$$\begin{aligned} Z &= a + i_k \cdot b; \\ |Z| &= \sqrt{a^2 - k \cdot b^2}; \\ \tan_k(\varphi) &= \frac{\sin_k(\varphi)}{\cos_k(\varphi)} = \frac{b}{a}; \end{aligned} \quad (8)$$

где мы определяем новые обобщенные тригонометрические функции:

$$\begin{aligned} Z &= |Z| \cdot \left(\frac{a}{a^2 - k \cdot b^2} + i_k \cdot \frac{b}{a^2 - k \cdot b^2} \right) = \\ &= |Z| \cdot (\cos_k(\varphi) + i_k \cdot \sin_k(\varphi)). \end{aligned} \quad (9)$$

Подобный подход можно увидеть в [9]. Результаты моделирования для различных значений k представлены на Рис. 7.

Как можно заметить, кольцо нулевых фаз, которое мы могли видеть при исследовании геометрии Галилея ($k = 0$), также является и первым внутренним кольцом фазовых возмущений для обычной евклидовой геометрии на комплексной плоскости.

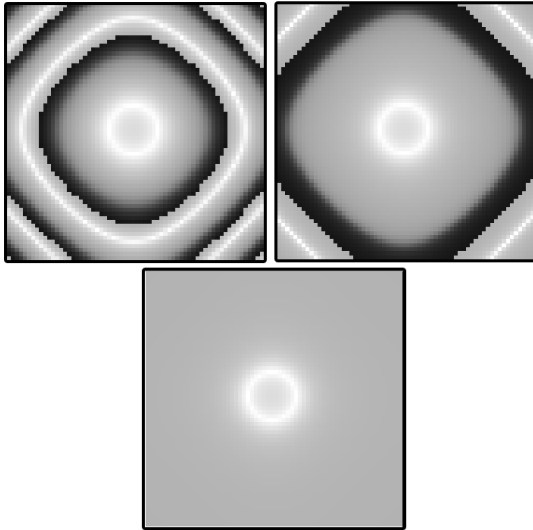


Рис. 7. Значения фаз состояний клеток (т.е. только верхние правые четверти) для $k = -0.25, k = -0.05$ и $k = 0$ для постоянных $\arg\{D\} = 40.5^\circ, |D| = 0.07$ на 128-ой итерации

Рис. 7 может привести нас к выводу: уменьшая значение $k, i_k^2 = k$, мы увеличиваем расстояние между кольцами нулевой фазы для пятна, которое мы получаем от возбужденной клетки.

VI. Эксперименты с интерференцией

До этого момента мы тестировали поведение единственной точки, которая возбуждалась в метасреде. Теперь же можно посмотреть, что получится, если мы рассмотрим взаимодействие двух точек, которые были возбуждены в один и тот же момент времени.

Рис. 8 содержит результаты таких экспериментов для простейшего случая: $D \in \mathbb{R}, i^2 = -1$. Это соответствует решению уравнения диффузии (или

теплопроводности), где мы можем наблюдать простое наложение пятен без каких-либо волновых процессов и колебаний.

Более интересные результаты можно увидеть на Рис. 9, где мы использовали комплексную метасреду с $D \in \mathbb{C}, \arg\{D\} \neq 0^\circ$. В этом случае

фаза комплексного коэффициента диффузии равна $90^\circ = \frac{\pi}{2}$, поэтому результат можно рассматривать в качестве решения уравнения Шредингера для новых начальных условий.

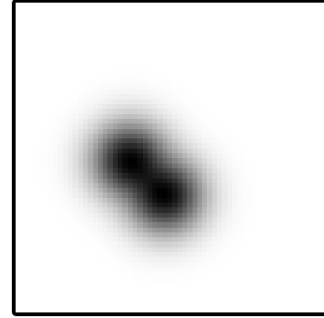


Рис. 8. Простая интерференция двух точек в среде с $\arg\{D\} = 0^\circ, i^3 = -1$

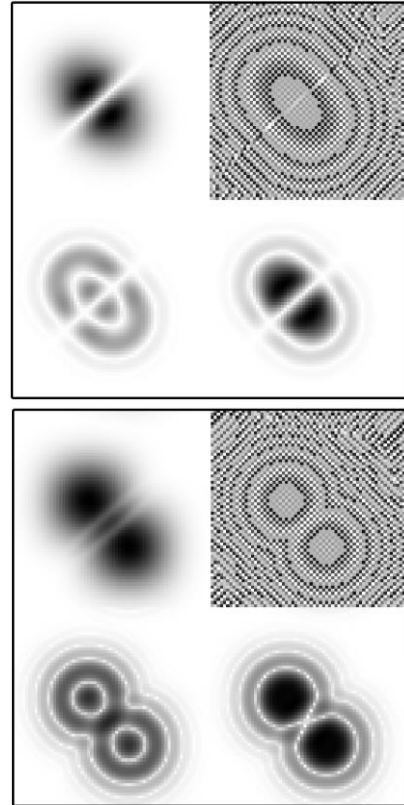


Рис. 9. Интерференционная картина для двух точек, которые расположены относительно близко (рисунок сверху) и далеко (рисунок снизу) друг от друга. Евклидова геометрия, $\arg\{D\} = 90^\circ$

Можно заметить, что выходной результат зависит от расстояния между двумя точками. Также другой эффект может быть достигнут при возбуждении точек с относительной задержкой (не одновременно). Это будет означать, что фазы колебаний внутри распространяющихся пятен смещены.

На Рис. 10 показаны результаты интерференции для метасреды с комплексной геометрией Галилея ($i^2 = 0$). Отметим, что белые кольца нулевых фаз

не пересекаются друг с другом. Вместо этого они плавно соединяются.

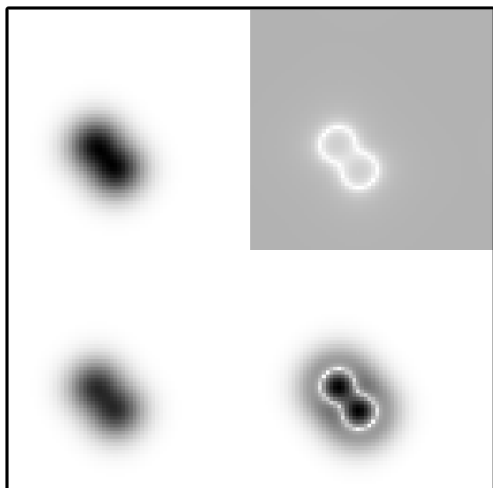


Рис. 10. Интерференционная картина для двух точек. Геометрия Галилея, $\arg\{D\} = 60^\circ$

VII. Моделирование движения частицы для различных фаз коэффициента диффузии

Можно достичь очень необычных и интересных результатов, если создавать последовательность белых точек, которые находятся на круговой траектории, шаг за шагом вместо использования только одной точки в центре. Мы используем хорошо известное уравнения для нахождения координат $(x(t), y(t))$ для следующей позиции возбуждаемой точки на 2D плоскости:

$$\begin{aligned} x(t)^2 + y(t)^2 &= R^2; \\ x(t) &= R \cdot \cos(V \cdot t); \\ y(t) &= R \cdot \sin(V \cdot t); \end{aligned} \quad (10)$$

где R — это радиус круговой траектории и V — параметр скорости движения. Этот алгоритм может быть использован для симуляции движения частицы в нашей возбудимой метасреде с необычными законами поведения.

Рис. 11 и Рис. 12 демонстрируют применение алгоритма в действии для высоких и низких значений комплексной фазы D . В этом эксперименте применена евклидова геометрия, т.к. она обеспечивает самые значимые результаты.

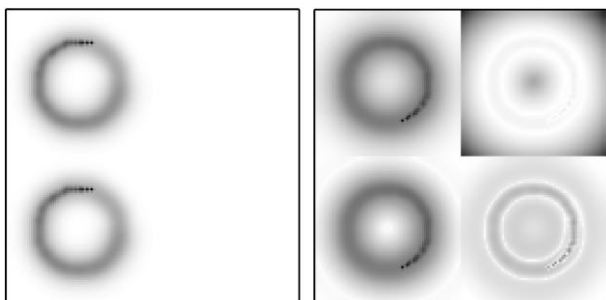


Рис. 11. Симуляция движения частицы для фиксированной итерации при фазах D , равных 0° (рисунок слева) и 30° (рисунок справа)

След частицы в четвертях с фазами и мнимыми составляющими появляется, когда мы увеличиваем значение фазы D . Заметьте, что изначально процессы интерференции отсутствуют в четвертях, которые представляют действительные составляющие и абсолютные значения состояний клеток.

Когда $\arg\{D\}$ достигает 60° и более, возникает новая особенность процесса. Линия, отделяющая новую часть "хвоста" частицы от предыдущей части, появляется в четвертях с модулями и действительными частями.

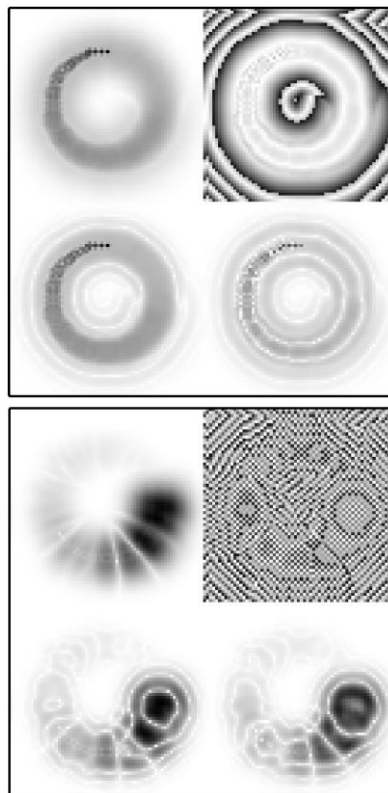


Рис. 12. Симуляция движения частицы на 128-ом шаге работы для фаз D , равных 60° (рисунок слева) и 90° (рисунок справа)

Дальнейшее увеличение фазы D приводит к появлению тех же процессов интерференции, которые мы могли видеть на Рис. 9. Важно отметить, что абсолютные значения состояний клеток, которые расположены поблизости от нашей круговой траектории, не постоянны: они затухают. Это происходит потому, что колебания не синфазны. Но мы можем предположить, что возможно найти такое значение круговой скорости частицы V , которое даст взаимное поддержание колебаний всеми частями следа и мы сможем увидеть стабильное состояние.

VIII. Заключение

Итак, реакция возбудимой среды на одинаковое воздействие сильно зависит от параметров комплексного коэффициента диффузии, таких как его фаза. Выбор типа геометрии еще более важен: ее смена с одной на другую кардинально изменяет результаты экспериментов. "Экзотические" возбудимые среды, которые мы представили в данной работе, могут обеспечить новые возможности для квантовых подходов к обработке изображений.

Дальнейшая работа будет относиться к цифровой обработке изображений. Множество алгоритмов обнаружения контуров, определения шаблонов и удаления шума, реализованные через уравнение Шредингера для обыкновенной комплексной плоскости, следует протестировать с геометриями Минковского и Галилея для разных значений фазы коэффициента D . Возможно, что с помощью новой

метасреды получится достичь еще более хороших результатов.

Работа создана при поддержке Научно-образовательного центра превосходства квантовых и видеотехнологий УрФУ, Екатеринбург, Россия.

IX. Список литературы

- [1] Wolfram S. Cellular automata as models of complexity. *Reprinted from Nature*; Volume 311, No. 5985. Macmillan Journals Ltd., 1985. - p. 419--424.
- Cardenas-Barrera J., Plataniotis K. QCA Implementation of a Multichannel Filter for Image Processing. *Mathematical Problems in Engineering*, 2002, Vol. 8, p. 87--99.
- Rosin P., Adamatzky A., Sun X. Cellular Automata in Image Processing and Geometry -- Switzerland.: *Springer International Publishing*, 2014. 304~p. - p. 65--80.
- Csetverikov D. Basic Algorithms for Digital Image Analysis: a course. Lecture 4: Filtering II. *Faculty of Informatics*, EotvosLorand University. Budapest, Hungary.
- Jorg R. Welmar, John J. Tyson and Layne T. Watson. Third Generation Cellular Automaton for Modeling Excitable Media. *Technical Report TR-91-11*, Computer Science, Virginia Polytechnic Institute and State University, 2001.
- Лабунец В. Г. Возбудимые метасреды Шредингера. *CriMiCo 2013 - 2013 23rd Internation Crimean Conference. Microwave and Telecommunication Technology, Conference proceedings*. - 2013. V.I.. - p. 12.
- Cannon J. W. Hyperbolic Geometry. *Flavors of Geometry*, Volume 31. MSRI Publications, 1997. - p. 7-8.
- Yaglom I. Complex numbers in geometry -- New York.: *Academic press*, 1968. 242~p. - p. 203--205.
- Harkin A.A. and Harkin J.B. Geometry of generalized complex numbers. *Mathematics magazine*, Vol. 77, No. 2. Mathematic association of America, April 2004. - p. 1-5.